

0 podrijetlu brojeva

Vodič kroz prezentaciju

1. Povijest brojeva vrlo je stara i premda se donekle može pratiti kroz brojne arheološke nalaze, teško ju je pouzdano ispisati. Pojedine društvene zajednice razvijale su svoj, raznim specifičnostima uvjetovan sustav zapisivanja brojeva i računanja. Zapravo, možda se u samim počecima i ne može govoriti o brojevima u onom smislu kako brojeve danas shvaćamo i upotrebljavamo. Ovom malom prezentacijom prošetat ćemo kroz povijest i pokušati prikazati kako su se naši daleki (i bliži) preci snalazili u praktičnoj potrebi brojenja i prebrajanja.
2. U jami poznatoj kao **Border Cave** u planini Lemombo na granici Svazija i Južne Afrike najstarije je nalazište nekog matematičkog zapisa. Na tamo nađenoj majmunskoj kosti, staroj približno 37 000 godina, urezano je 29 ureza. Što je njima zabilježeno, danas nije moguće reći. Slične, vučje kosti našao je češki arheolog Karl Absolom u **Srednjoj Češkoj** 1937. g. Stare su gotovo 30 000 godina s urezima koji, prema vjerovanju antropologa, znače zapis izvjesnih količina. Jean de Herinzelin de Braucourt, belgijski istraživač u **Ishangu** na granici Ugande i Konga, svega 15 km od ekvatora, 1950. g. pronašao je kosti čija je starost procijenjena na 20 000 godina. Te se kosti danas nalaze u Muzeju prirodoslovlja u Bruxellesu. Na slici lijevo nalazi se geografska karta dijela Afrike u kojem se nalazi Ishanga. Na desnoj vidimo spomenute kosti.
3. Ovi štapovi na slici, tzv. **rovaši**, mnogo su mlađi od spomenutih nalaza pa ipak se u suštini ne razlikuju mnogo od njih. U ne tako davnoj prošlosti, čak i u prošlom stoljeću, na drvenim štapovima (rovašima) trgovci su upisivali dugove seljacima. I danas se stariji ljudi u Hrvatskoj sjećaju "*kupnje na rovaš*". Nepismen bi seljak kod trgovca otvorio svojevrsan zapisnik dugovanja, jedan bi štap bio u seljaka, drugi istovjetan u trgovca. Nakon obrane ljetine, seljak bi od trgovca otkupio svoj rovaš. Zapisi na rovašima vrlo su slični onima na kostima iz Lemomba i Ishanga. Oni ukazuju na intuitivno poimanje pojma broja.
4. A i danas se ponekad može vidjeti evidentiranje sasvim slično onomu s rovaša. Tako primjerice pri nekim kartaškim igrama crticama ili točkicama bilježimo neki usputni rezultat. Kako se ponekad provodi javno glasovanje u nekoj razrednoj ili drugoj manjoj zajednici? Na većoj slici vidimo kako izgleda zid u praškoj pivnici "*U kaliha*" (koja je poznata po Hašekovu Švejkju), a na manjoj je podložak za pivo iz (vjerojatno) najznamenitije svjetske pivnice "*Kod tigra*", u Husovoj ulici, također u Pragu. Protumačite ove sličice.
5. Vratimo se ipak u daleku prošlost. Krajem 80-ih godina prošlog stoljeća antropologinja **Denise Schmandt-Besserat** (na slici desno dolje) proučavala je obilje glinenih predmeta pronađenih na području Srednjeg Istoka čija je starost veća od 5000 godina. Ti predmeti, raznih oblika, bili su veličine od 1 do 3 cm, a koristilo ih se za evidentiranje izvjesnih dobara ili blaga. Bili su dio sustava koji se razvijao tijekom nekoliko tisućljeća. Predmeti u obliku čunjića (stožaca) upotrebljavali su se za evidentiranje manjih količina žita. Deset je čunjića zamjenjivala jedna kuglica. Figuricama u obliku valjka "zapisivao" se broj stoke itd. Krajem 4. tisućljeća prije Krista ovaj način evidentiranja dopunjen je pa se tako upotrebljavalo gotovo 300 figurica različitih oblika.

Na slikama su predmeti koji potječu iz arheoloških nalazišta u Susi u Iranu, a stari su oko 3 do 4 tisuće godina. Predmet u prvom retku na slici lijevo gore pridruživao se jednoj ovci, predmet do njega bio je jedinica za ulje, do njega je jedinica za metal itd. Sličnoj svrsi bili su namijenjeni i predmeti na drugim dvjema slikama.

6. U dolini rijeke Nil (lijevo je satelitska slika dijela Egipta kroz koji protječe ova rijeka) nastala je jedna od najstarijih i vrlo razvijenih civilizacija. Egipatsko slikovno pismo (hijeroglifi) upotrebljavalo se i u matematici. Na desnoj je slici dio **Rhind papirusa** nazvan po istraživaču Rhindu, a jedan je od najstarijih dokumenata s matematičkim tekstom. Nalazi se u Britanskom muzeju u Londonu. Papirus potječe iz (oko) 1700. g. pr. Kr., a djelo je pisara Ahmesa. Sadrži 84 riješena praktična problema.
7. Na slici desno vidimo zapis nekih brojeva na kamenim stijenama u Luxoru. Luxor postoji i danas kao manji grad smješten na Nilu. Poznat je po aleji sfingi. A evo kako su stari Egipćani zapisivali brojeve (slika lijevo gore). Jedinica je bila ravna crtica, broju deset pridružena je potkova (deset rupa na potkovi), uže je simboliziralo broj 100, lopoč (njih je na tisuće u rijeci) bio je znak za 1000, broj 10 000 označavan je skvrčenim kažiprstom, a broj 100 000 zapisivao se crtežom žabe (kojih je bilo na stotine tisuća u vlažnom priobalju Nila). Za sve veće brojeve od milijuna crtao se čovjek s rukama uzdignutim ka nebu, kao da se hoće reći *“toliko mnogo, koliko je zvijezda na nebu”*. Nizanjem ovih znakova zdesna ulijevo, u dekadskom sustavu, zapisivali su se brojevi. Zapis jednog broja u ovom pismu vidimo lijevo gore, a i na slici lijevo dolje zapisan je jedan broj.
8. Babilonci su razvili zavidna znanja iz astronomije i svakako su bili vrsni matematičari. U zapisu brojeva koristili su klinasto pismo. Znakovi su utiskivani u glinene pločice koje bi se potom osušile i pohranjivale. Brojevni je sustav imao osnovicu 60, što je bila posljedica praktičnosti u astronomskim istraživanjima. Taj se sustav zadržao do danas u mjerenju kutova pa donekle i u mjerenju vremena. “Klin” je značio jedan, a običnim nizanjem zapisivani su redom veći brojevi. Jednu tipičnu pločicu vidimo na slici desno, a na slici lijevo gore zapisi su brojeva od 1 do 50. Na slici lijevo dolje vidimo kako izgleda zapis broja 424 000.
9. Uz još neke primjere kojima bismo mogli ilustrirati iste zamisli i rješenja u ranom zapisivanju rezultata prebrajanja evo još jednog koji su rabili Indijanci Maye. Točkica je značila jedan, crtica pet. Lako je uočljivo kako je slijedilo zapisivanje pojedinih brojeva. Ovaj je sustav najvjerojatnije za bazu imao broj 20. U njemu se možda i najzornije može uočiti podrijetlo najranijeg zapisivanja brojeva. Nije li možda točkica zamijenila kamenčić, a crta prst? Na slici desno zapis je s jednog nadgrobnog spomenika pronađenog u Meksiku u blizini Santa Cruzu.
10. Rimski zapis brojeva i danas se ponekad upotrebljava, no praktički i nije u široj uporabi. Na slici vidimo stari sunčani sat u Tkalčićevoj ulici u Zagrebu. Na njemu su rimskim brojevima naznačeni puni satovi. Rimski je sustav brojeva dekadski i nepozicijski. Da je dekadski znači da 10 jedinica čini jednu deseticu, 10 desetica da je jedna stotica, 10 stotica jedna tisućica itd. A nepozicijski je zbog toga što svaki znak predstavlja istu brojevnju vrijednost bez obzira na njegov položaj u zapisu broja. Tako je primjerice CCCXXXIII zapis broja $100+100+100+10+10+10+1+1+1 = 333$. Vidimo da primjerice znak C predstavlja broj 100 bez obzira na to gdje se nalazi u zapisu. A u pozicijskom zapisu, kakav se danas upotrebljava gotovo u cijelom svijetu, znamenke 3 broja 333 imaju sasvim različite brojevnje vrijednosti. U sustavima kakav je rimski zapisivanje brojeva kao i pismeno računanje nezgrapno je i dugačko.
11. Na Bašćanskoj ploči, koja potječe iz 11. stoljeća, a koju vidimo u podlozi ovom slajdu, nailazimo na brojeve pisane glagoljicom. Za zapis brojeva služe slova, a kako bi se razlikovalo riječi i brojeve, ispred i iza broja ucrtalo bi se male kvadratiće, a često bi se i povrh slova, koje znači broj, nacrtala vitica.

O pisanju brojeva glagoljskim pismom možete pročitati u članku dr. Darka Žubričića *Glagoljski brojevi* objavljenom u MiŠ-u 11/2001. U prilogu se nalazi i članak iz MiŠ-a 2/1999. *Kako su računali naši stari*, Nike Radića i Darka Žubričića.
12. Razmotrimo sada ovu shemu na kojoj je prikazan razvitak zapisa znamenki od 0 do 9 u pojedinim vremenskim razdobljima. Prateći te zapise naziremo podrijetlo suvremenih simbola. Vjeruje se kako suvremeni zapisi znamenki imaju korijene u Indiji pa se tako govori o indijskim ili indijsko-arapskim znamenkama premda ih često u Europi i Sjevernoj Americi zovu arapskim. Vjerojatni je razlog njihovo prispijeće u Europu iz Sjeverne Afrike u 10. stoljeću.

13. "Prirodne brojeve stvorio je Bog, svi su ostali djelo ljudsko", rekao je matematičar Weierstrass. Neki su prirodni brojevi ipak posebni. Pitate li se zbog čega hotel čije se tipke uz dizalo vide na slici nema 13-og kata?

No vratimo se gornjoj izreci. Možda je ona posljedica otvaranja silnih novih pitanja što ih je izazvalo proširivanje skupa prirodnih brojeva potaknuto praktičnim zahtjevima. Već uvođenje nule *pustilo je duha iz boce*. "Kako ništa može biti nešto?", pitali su se stari Grci. Još do srednjeg vijeka vukla su se slična pitanja premda su nulu poznavali neki stari narodi kao primjerice Egipćani i Babilonci. Oni nisu oko nje imali dvojbi, ona je jednostavno bila rješenje za neka realna pitanja. Iako je danas nula samo jedan od realnih brojeva, mora joj se priznati poseban status. Možete li odgovoriti zbog čega?

14. Računanje s prirodnim brojevima potaknulo je potrebu uvođenja nule, ali i negativnih brojeva. I opet nije moguće odgovoriti na pitanje kad su oni uvedeni u matematiku, ali pouzdano se znade da su ih rabili Kinezi u I. st. pr. Kr. Na Zapadu su se pojavili nešto kasnije. Tako primjerice Diofant u 3. st. rješava jednadžbe čija su rješenja negativni brojevi. No, u sustavnoj uporabi negativni brojevi pojavljuju se tek u 17. st. u Europi iako i dalje postoje prijeponi oko njihova smisla, pa je čak i jedan Leonhard Euler prema njima nepovjerljiv i odbacuje ih kao rješenja jednadžbi jer su besmisleni. Danas su negativni brojevi prihvaćeni u svakodnevnom životu. Na slikama vidimo neke primjere u kojima se uočava smisao negativnih brojeva. Možete li navesti još neki sličan primjer?

15. Uz prirodne i cijele brojeve tijekom ljudske povijesti stvoreni su i drugi. I njihovo je uvođenje potaknuto nekim stvarnim i praktičnim pitanjima. Tako je dijeljenje cijelih brojeva dovelo do uvođenja racionalnih, a neka jednostavna mjerenja, kao što je duljina dijagonale pravokutnika ili opseg kruga, uvjetovala su uvođenje iracionalnih brojeva. Na ovom slajdu zapisani su neki decimalni brojevi. Prva su tri racionalna. Racionalni su brojevi količnici dvaju cijelih brojeva, od kojih je onaj s kojim se dijeli uvijek različit od nule. U decimalnom zapisu ti su brojevi ili konačni ili beskonačni. Ako su beskonačni, onda su periodični, što znači da se skupina znamenki uzastopce (periodički) ponavlja. Period prvog broja sadrži dvije znamenke (27), u periodu drugog su četiri znamenke (3987), a treći je broj konačan decimalni broj. Brojevi $\sqrt{2}$, e i π primjeri su iracionalnih brojeva. To su beskonačni neperiodični decimalni brojevi.

16. Na ovom posljednjem slajdu prikazani su međusobni odnosi pojedinih skupova brojeva. Potrebno je pozorno razmotriti i protumačiti ovu sliku.